

非局所移流項を持つ反応拡散方程式に対する分岐解析

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
長山ゆい (Yui NAGAYAMA) *

概要

周囲の環境に応じた移動をカーネルとのたたみこみによって表現した非局所移流項を持つモデルが提案されている。モデルに対するパターン形成の議論はしばしば線形化安定性解析と数値計算によって進められるが、それのみでは不十分であることが指摘されている。また、自明解が安定なパラメータにおいても非自明解が存在しうることが数値的に報告されているが、この構造とカーネル形状の関連は明らかになっていない。これらを踏まえて、本研究では局所分岐解析を用いて分岐の存在を厳密に示し、縮約方程式から多重安定が生じうるカーネルの条件を整理した。さらに数値分岐解析により多重安定性の存在を調べた結果を報告する。内容は長山雅晴氏、石井宙志氏（北大）との共同研究に基づく。

1 はじめに

反応拡散方程式は化学反応や動物の体表など、自然界に見られる空間的なパターン形成の理解に広く応用してきた。代表的なパターン形成メカニズムとして、Turing により提案された「拡散誘導不安定性 (Turing 不安定性)」が挙げられる [1]。これは 2 成分反応拡散系において、拡散を無視した常微分方程式系では一様定常解 (自明解) が安定であっても、拡散の効果によってその自明解が不安定化し、空間非一様なパターン (非自明解) が現れうるというものである。拡散に起因するものに限らず、方程式のあるパラメータを変化させ自明解が不安定した際に非自明解が現れる構造が知られており、一般に Turing 分岐と呼ばれる。

反応拡散系では個体や物質の移動はランダムなものとして拡散項によって表される。しかし実際には周囲の環境から影響を受けて方向性を持った移動が発生する状況も考えられる。非局所移流項はそのような非局所相互作用に基づいた移動を表現する項である。この項が導入された代表例として、細胞接着の効果を非局所移流として表現した APS モデルが挙げられる [2]。これは反応拡散方程式と組み合わせたモデルとなっており、後に改良を経て、細胞集団で見られる実験事実を数値的に再現できることが報告された [3]。近年では動物の群れ形成やゼブラフィッシュの色素細胞で見られる相互作用など様々な現象の理論解析に応用されている。代表的な非局所移流方程式として

$$u_t = -\nabla \cdot (u \nabla (K * u)) \quad (1)$$

* E-mail:nagayama.yui.z5@elms.hokudai.ac.jp

が挙げられる. ただし $K * u$ はたたみこみで

$$(K * u)(t, x) := \int_{\mathbb{R}} K(x - y)u(t, y) dy$$

であり, K はカーネルと呼ばれる. この方程式や関連するモデルは生物学的仮定によるモデリング [2], 粒子モデルの極限 [4], 走化性モデルの縮約 [5] など様々な方法で得ることができる. 中でも粒子モデルによる導出はカーネルの形状による移流の効果の特徴づけを理解する上で重要であるため, 簡潔に紹介する. 粒子モデルを

$$\mathcal{E}[(x_1, x_2, \dots, x_M)] = -\frac{1}{2M^2} \sum_{i \neq j} K(|x_i - x_j|) \quad (2)$$

の勾配流によって定める. ただし

$$x_i(t) = (x_{i,1}(t), \dots, x_{i,n}(t)) \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, \dots, M)$$

は M 個の粒子の時刻 t における位置であり, カーネル K は球対称関数である. 得た粒子モデルに対して $M \rightarrow \infty$ の極限を考えると非局所移流方程式が得られる [4]. したがって, (1) は粒子が \mathcal{E} を減少させる距離に配置される運動を表す方程式と考えることができる. 例えばカーネルが原点からの距離に関して単調減少の場合, \mathcal{E} を最小化する 2 粒子間の距離は 0 となり, 粒子同士が接近する効果を表すカーネルとなる. 以降そのような効果を「凝集」と表現する. また, 粒子同士が遠ざかる効果を「反発」と表現する. さらに, カーネルの形状によって現れるパターンが変化することが報告されており, カーネルの性質が解構造やパターンに与える影響を理解することは重要である [3].

本研究では空間 1 次元における非局所移流項を持つ次の方程式を考える :

$$u_t = du_{xx} - [u(K * u)_x]_x + cu(1 - u) \quad (t > 0, x \in I). \quad (3)$$

$u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ は時刻 t , 位置 x における個体密度に対応する. $I := [0, L]$ で, 周期境界条件を課す. d, c はともに正の定数で, カーネル K は偶関数 $J \in L^1(\mathbb{R})$ とパラメータ $k > 0$ を用いて $K(x) = kJ(x)$ として定める. I 上におけるたたみこみは次のように定義する :

$$(K * u)(t, x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_I K(x - y - jL)u(t, y) dy \quad (x \in I). \quad (4)$$

方程式 (3) や類似したモデルにおいて, Turing 分岐の存在についてはしばしば自明な定常解まわりでの線形化安定性解析と数値実験により議論される. しかし, 自明解の不安定化のみでは安定非自明解の存在は保証されないことが指摘されている [6]. 実際に空間パターンが現れる, すなわち安定非自明解が現れるることを調べるには「分岐の存在」と「非自明解の安定性」を調べる必要がある. さらに Jewell ら [7] は空間 2 次元において, 自明解が安定なパラメータ領域であっても時空間パターンが現れる「多重安定性 (Multistability)」の存在を数値的に示唆しているが, 反応項を持つモデルではカーネルの形状と多重安定性の関係については議論が進んでいない. この現象が起こりうる構造として, 我々は亜臨界分岐の発生に注目した. これは自明解が不安定化した際に, 自明解が安定なパラメータ領域に不安定な非自明解が現れる分岐であり, 現れた不安定非自明解が再び安定性を回復すれば多重安定が達成される. また, 亜臨界分岐が起きる条件は分岐点近傍における解析によって調べる

ことが可能である。以上を踏まえて本研究の目的は、方程式 (3) に対して亜臨界分岐とカーネル形状の関係を整理し、どのような多重安定性が存在するかを明らかにすることである。亜臨界分岐とカーネル形状の関係は局所分岐解析に基づいて解析的に議論し、多重安定性については数値分岐解析を用いて検証する。

次節から主結果を紹介する。2 節では (i) 定常解の分岐の存在 (ii) 自明解が不安定化する分岐点近傍における縮約方程式の導出 (iii) 分岐の向きに関する条件に関する結果を順に紹介し、3 節で数値分岐解析による多重安定性の存在の検証について紹介する。最後にまとめと課題を述べる。

2 主結果 1：定常解の分岐

この節では分岐点近傍において解析的に得られた結果について述べる。以降は方程式 (3) においてカーネルに含まれる $k > 0$ を分岐パラメータとする。

2.1 分岐の存在

自明解に関して、 $u = 0$ は常に不安定であるため以降 $u = 1$ のみに注目する。(3) は $u = 1 + w$ とおくと

$$w_t = dw_{xx} - cw - cw^2 - k(J * w_{xx}) - k[w(J * w)_x]_x =: H(k, w) \quad (5)$$

と書き換えられる。特に線形部分を作用素 $\mathcal{L} : H_{\text{per}}^2(I) \rightarrow L_{\text{per}}^2(I)$ として

$$\mathcal{L}w := dw_{xx} - cw - k(J * w_{xx}) \quad (6)$$

と定め、 \mathcal{L} の固有値問題 $\mathcal{L}w = \lambda w$ を考える。フーリエ級数展開：

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{i\sigma_n x}, \quad \sigma_n = \frac{2\pi n}{L}$$

を適用すると

$$\mathcal{L}w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ (-d + k\hat{J}(\sigma_n))\sigma_n^2 - c \right\} w_n e^{i\sigma_n x} =: \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n(k) w_n e^{i\sigma_n x} \quad (7)$$

が得られる。ただし、 \hat{J} は J のフーリエ変換で

$$\hat{J}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} J(x) e^{-i\xi x} dx$$

である。 J は偶関数であるため \hat{J} が実数値偶関数である。また、レゾルベントの構成により \mathcal{L} のスペクトル集合は $\{\lambda_n(k)\}_{n \geq 0}$ であることがわかる。このとき、 $u = 1$ からの分岐の存在に対応する次の定理を得た：

定理 1. 定数 $d, c > 0$ に対して $k^* > 0$ とある自然数 N が存在し、自然数 n に対して

$$\lambda_n(k^*) = (-d + k^* \hat{J}(\sigma_n))\sigma_n^2 - c \begin{cases} = 0 & \text{if } n = N, \\ \neq 0 & \text{if } n \neq N \end{cases} \quad (8)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $(k, w) = (k^*, 0)$ は

$$H(k, w) = dw_{xx} - cw - cw^2 - k\{J * w_{xx} + (w(J * w)_x)_x\} = 0$$

の分岐点であり, この近傍で非自明解が存在する.

■証明の概略 関数空間を

$$\begin{aligned} X &:= \{u \in H_{\text{per}}^2(I) \mid u(x) = u(L-x), x \in I\}, \\ Y &:= \{u \in L_{\text{per}}^2(I) \mid u(x) = u(L-x), x \in I\} \end{aligned}$$

と定め, X から Y の作用素を

$$\mathcal{L}_1 w = dw_{xx} - cw, \quad \mathcal{L}_2 w = J * w_{xx}, \quad N_1(w) = -cw^2, \quad N_2(w) = (w(J * w)_x)_x$$

によって定義する. このとき $H : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ は

$$H(k, w) = \mathcal{L}_1 w + N_1(w) - k(\mathcal{L}_2 w + N_2(w))$$

と表せる. 線形作用素 $\mathcal{L}_1 - k\mathcal{L}_2$ は自己共役作用素であり, 非線形項に関して $N_i(0) = 0$, $DN_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$) が成り立つ. ただし $DN_i(w)$ は $N_i(w)$ の Fréchet 微分である. さらに関数空間の設定から $\mathcal{L}_1 - k\mathcal{L}_2$ に関して

$$\dim \text{Ker}(\mathcal{L}_1 - k^* \mathcal{L}_2) = \text{codim} \text{Range}(\mathcal{L}_1 - k^* \mathcal{L}_2) = 1$$

が成り立ち, 像は

$$\text{Range}(\mathcal{L}_1 - k^* \mathcal{L}_2) = \left\{ w \in Y \mid \int_I w(x) \cos(\sigma_N x) dx = 0 \right\}$$

として表される. 以上より $H(k, w) = 0$ に対して $(k^*, 0)$ において Crandall-Rabinowitz の定理を適用できる. \square

この定理によって非自明解の存在が保証される. より詳しく分岐点近傍のダイナミクスを調べるために, 次節で分岐点近傍の縮約方程式を導出する.

2.2 中心多様体縮約

特に $u = 1$ が初めに不安定化する分岐点に注目するため, 次を仮定する:

$$\lambda_n(k^*) = (-d + k^* \hat{J}(\sigma_n))\sigma_n^2 - c \begin{cases} = 0 & \text{if } n = N, \\ < 0 & \text{if } n \neq N. \end{cases} \quad (9)$$

N モードは線形化では安定性を判断できない中立成分であるため, N モードのダイナミクスによって非自明解の安定性が決まる. ここで有効な手法が中心多様体縮約である [9]. 方程式 (5) が縮約可能であるためには, 非線形項に関する仮定と線形作用素 (6) に関する仮定:

- スペクトル集合のうち, 実部 0 のものが重複度をこめて有限個であり, 虚軸に収束する列が存在しない

- ある $\omega_0, c > 0$ が存在して, $|\omega| \geq \omega_0$ を満たす任意の実数 ω に対して次が成り立つ:

$$\|(i\omega \mathbf{I} - \mathcal{L})^{-1}\|_{L(Y)} \leq \frac{c}{|\omega|}$$

を満たす必要がある. 非線形項に関する仮定は前節において示されたものである. 線形作用素に関する仮定は自己共役性と, スペクトル集合が $\{\lambda_n(k)\}_{n \geq 0}$ であることから直ちに満たされる. したがって方程式 (5) は仮定 (9) の下で縮約可能であり, 中立固有値 λ_N に対応する固有関数の振幅 w_N に関する次の縮約方程式が得られた: ある $\delta > 0$ に対して $w_N = O(\delta)$, $|k - k^*| = O(\delta^2)$ の範囲で

$$\dot{w}_N = \lambda_N(k^*)w_N + \mu w_N^3 + O(\delta^4), \quad \mu = -2(d\sigma_N^2 - c) - \frac{2d\sigma_N^2 + c}{2\lambda_{2N}} (\lambda_{2N} + 2d\sigma_N^2 - 5c).$$

よって, $u = 1$ が始めに不安定化するとき発生する分岐は Pitchfork 分岐である. Pitchfork 分岐は 3 次の係数 μ の符号によって超臨界と亜臨界の 2 種類に分類される. 本研究で興味があるのは多重安定性が存在しうる条件, すなわち亜臨界分岐が生じるカーネルの条件である. 次の節で具体的にこの条件を整理する.

2.3 亜臨界分岐の条件

自明解が初めに不安定化する分岐が亜臨界になる条件 $\mu > 0$ をカーネルのフーリエ変換を含んだ形に書き換えると, 次の不等式が得られた:

$$\frac{10(d\sigma_N^2)^2 + d\sigma_N^2 c + c^2}{6} < (2d\sigma_N^2 - c)(d\sigma_N^2 + c) \frac{\hat{J}(\sigma_{2N})}{\hat{J}(\sigma_N)}. \quad (10)$$

この不等式を成立させるカーネルの設定を考える.

$$\alpha := d\sigma_N^2 > 0, \quad R := \frac{\hat{J}(\sigma_{2N})}{\hat{J}(\sigma_N)}$$

と置くと, 不等式は

$$0 < 2(6R - 5)\alpha^2 + (6R - 1)c\alpha - c^2(6R + 1) =: F(\alpha) \quad (11)$$

と表せる. この不等式を満たす条件は次の 2 通りに整理できる:

- (i) $6R - 5 \geq 0$ を満たすカーネルで, ある \tilde{N} モードより大きいモードが初めに不安定化する;
- (ii) $R < -\frac{1}{6}$, $R_+ \leq R < \frac{5}{6}$ を満たすカーネルで, ある範囲に含まれるモードが初めに不安定化する.

ただし R_+ は方程式 $F(\alpha) = 0$ の判別式を $D(R)$ とするとき, $D(R) = 0$ の正の解である. よって, 初めに不安定化するモードとその 2 倍のモードにおけるフーリエ変換の比を制御することで亜臨界分岐をもたらすカーネルを構成できる. 具体的なカーネルの構成例は後述することにし, 次節ではカーネルの変形によって亜臨界分岐の条件が満たされる例について示した命題を紹介する.

2.4 亜臨界分岐をもたらすカーネルの変形

分岐の向きを変化させるカーネルの変形の 1 例として次の命題を示した:

命題 1. $J \in L^1(\mathbb{R})$ は $\hat{J}(0) > 0$ かつ $\hat{J}(0) > \hat{J}(\xi)$ ($\xi \neq 0$) を満たす偶関数とする. カーネルを

$$K(x; b) = \frac{k}{b} J\left(\frac{x}{b}\right)$$

と定めるとき, 十分小さい b では $u = 1$ が不安定化するときに起る Pitchfork 分岐は亜臨界になる.

■証明の概略 与えたカーネルでは, 亜臨界分岐の条件 (10) は

$$\frac{10(d\sigma_{N(b)}^2)^2 + d\sigma_{N(b)}^2 c + c^2}{6} < (2d\sigma_{N(b)}^2 - c)(d\sigma_{N(b)}^2 + c) \frac{\hat{J}(b\sigma_{2N(b)})}{\hat{J}(b\sigma_{N(b)})} \quad (12)$$

となる. まず, $b \rightarrow +0$ で初めに不安定化するモード $N(b)$ が発散することを示す. このとき, 不等式 (12) の両辺で支配的になるのは $\sigma_{N(b)}^2$ の項である. 特に右辺にあらわれるフーリエ変換の比 ($R(b)$ とする) が $b \rightarrow +0$ で $5/6$ より大きい定数に収束すれば, 不等式両辺の $\sigma_{N(b)}^2$ の係数の比較により不等式の成立を示すことができる. 実際に $b\sigma_{N(b)} \rightarrow 0$ すなわち $R(b) \rightarrow 1$ を示すことができ, この議論が成立する. \square

亜臨界分岐の条件 (10) は分岐点近傍における分岐の向きに関する条件であり, 実際に多重安定なパラメータ領域が存在するかどうかは判断できない. このような場合に, 分岐点から離れた非自明解の安定性および非自明解の追跡が可能な数値分岐解析が有効である. 実際に条件を満たす複数のカーネルに対して数値分岐解析を行なった結果について次節で紹介する.

3 主結果 2: 数値分岐解析

数値分岐計算は [10] の手法を参考に Julia で実装した. 数値計算では, 方程式 (3) にフーリエ級数展開を適用して得られるフーリエモードの常微分方程式系:

$$\dot{u}_n = (-d\sigma_n^2 + c)u_n(t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} (k\sigma_n\sigma_{n-m}\hat{J}(\sigma_{n-m}) - c)u_m(t)u_{n-m}(t) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を有限で打ち切ったものを用いた. この節では命題 1 の条件を満たす Gaussian に対して変形を行うことで得られた亜臨界分岐の分岐図, さらに (10) を満たす 2 つの条件のうち一方を満たすカーネルで得られた分岐図を紹介する. 分岐図とは, 横軸をパラメータ k として各 k における解の情報を縦軸にプロットしたものである. 各パラメータで存在する解の個数や特徴, その安定性を知ることができる図となっている. 今回縦軸は定常解においてはフーリエモードから容易に計算可能な L^2 ノルム, 周期解では 1 周期における L^2 ノルムの最大値とした. また, 一般的に微分方程式の時間発展を数値的に求めた場合には不安定な解は観測されにくい. さらに多重安定性が存在する場合には収束先が初期値に依存するため, 他の安定解を見落としやすい. 一方, 数値分岐計算は解を連続的に追跡できるためこれらの困難を緩和でき, 解構造を把握する上で有効である.

■Gaussian の分岐図 凝集を表すカーネルである Gaussian :

$$K(x; b) = \frac{k}{b} J\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

を用いて亜臨界分岐の条件を満たすパラメータで見られた 2 種類の分岐図が図 1 である. $b = 0.1$ の場合 (図 1a), $k = 1.15$ 付近では安定な自明解と非自明解, 不安定な非自明定常解が存在しており, 多重安定であることがわかる. 安定定常解の代表例を図 1c に示す. さらに少し k を大きくすると安定な自明解と周期解, 不安定な非自明定常解が存在する領域が存在しており, 定常解と周期解の多重安定性が存在することがわかる. そこで現れる安定な周期解は, 図 1e に示すように縦に振動する解である. この分岐図から, 局所的に強く凝集する効果を持つカーネルでは一様状態が不安定化するとすぐ大きい振動が現れうることが示唆される. 一方で $b = 0.075$ (図 1b) の亜臨界分岐で現れる非自明定常解は自明解と多重安定にならず, 初めの分岐点から離れた $k = 1.45$ 付近の Hopf 分岐により安定性を回復する. この Hopf 分岐から現れる周期解は k を減少させる方向へ辿っていくと他の Hopf 分岐に合流することなく途切れている. 途切れるパラメータ付近に注目すると, 時間変化がほとんどない状態と急激に変化する状態を繰り返す特徴が見られた. ここで, 周期解の縦軸を「1 周期の間で最も時間変化が小さいときの解の L^2 ノルム」に変えた場合の分岐図を作成したところ, 周期解の枝の途切れる部分が不安定定常解に向かって伸びているような図が得られた (図 2a). また, 図 2b に示すように, 不安定定常解に近づくと急激に周期が増加している. これらの考察から $b = 0.075$ ではホモクリニック分岐によって周期解が消滅したことが示唆される.

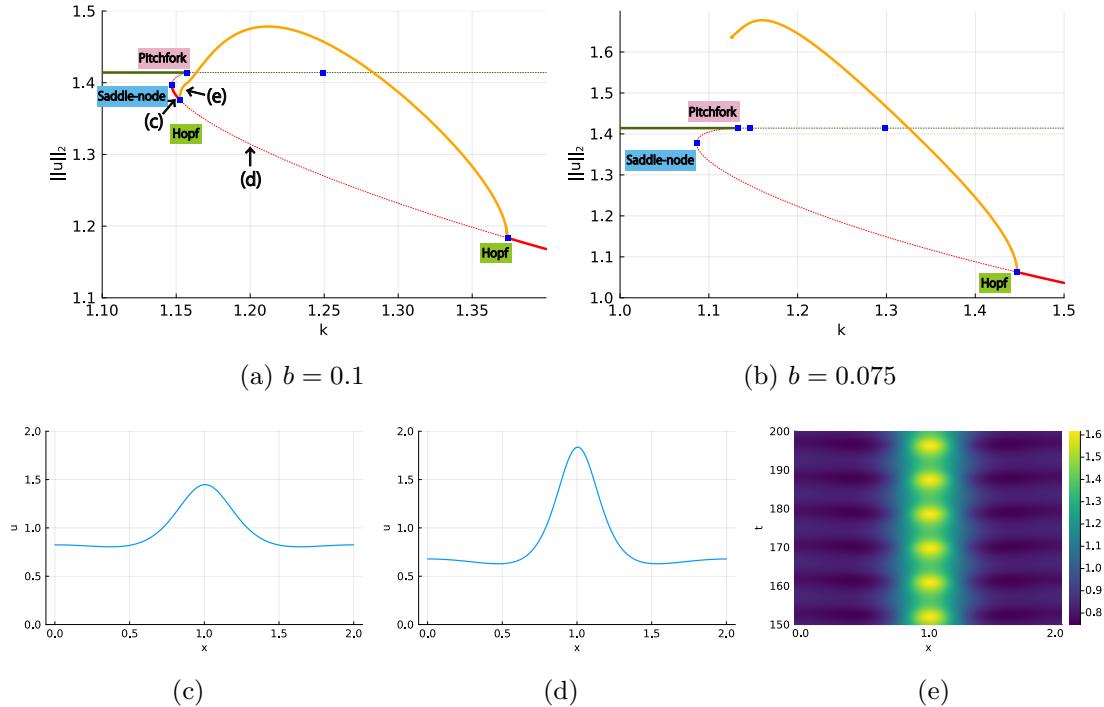


図 1: (a) Gaussian で $b = 0.1$ のときに得られた分岐図. (b) $b = 0.075$ のときに得られた分岐図. 緑は自明解, 赤は非自明定常解で実線は安定, 点線は不安定を表す. 青い四角は分岐点を表す. 黄色の実線は安定な周期解を表し, 縦軸は 1 周期の L^2 ノルムにおける最大値である. パラメータは 1 モードが初めに不安定化する $d = c = 1.0, L = 2.0$. (c)-(e) はそれぞれ (a) の矢印 (c)-(e) に対応する解でそれぞれ $k = 1.15, 1.2, 1.153$.

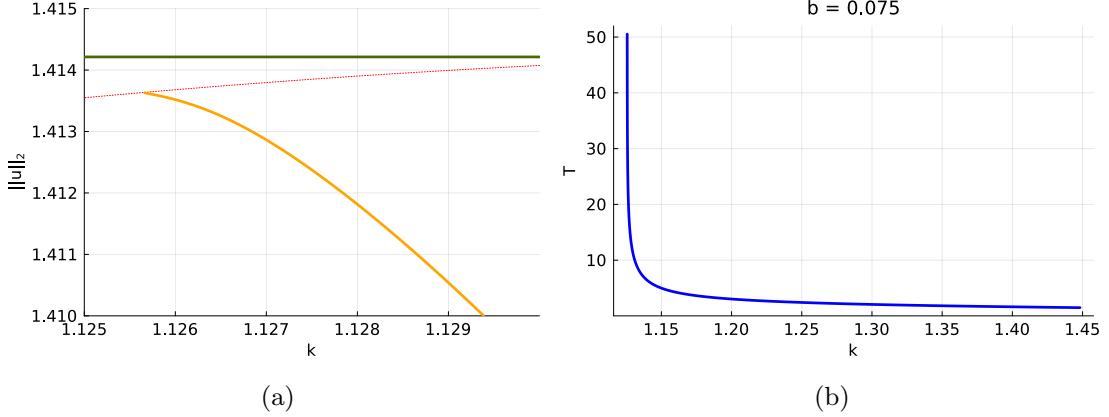


図 2: (a) は Gaussian で $b = 0.075$ において見られる周期解が途切れるパラメータ近傍の分岐図. 緑は自明解, 赤は非自明定常解で実線は安定, 点線は不安定を表す. 黄色の実線は安定な周期解を表し, 縦軸は 1 周期で時間変化が最小となるときの L^2 ノルムである. (b) はパラメータ k の変化に伴う周期解の周期の変化.

■ $R < -\frac{1}{6}$ を満たすカーネルにおける分岐図 カーネルとして

$$J(x) = a_1 G(x) \cos(\sigma_N x) + a_2 G(x) \cos(\sigma_{2N} x), \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad (13)$$

において $a_1 = 1.0, a_2 = -4.0, b = 2.5, N = 2$ としたものに対しても分岐図を作成した. このカーネルは先ほどの例と異なり反発の効果を持つ. パラメータを $d = 0.05, c = 1.0, L = 10.0$ として得られた分岐図が図 3である. 広い領域で多重安定性が達成されており, 3 つの定常解が多重安定となる領域が見られた. 典型的な定常解は図 4に示した.

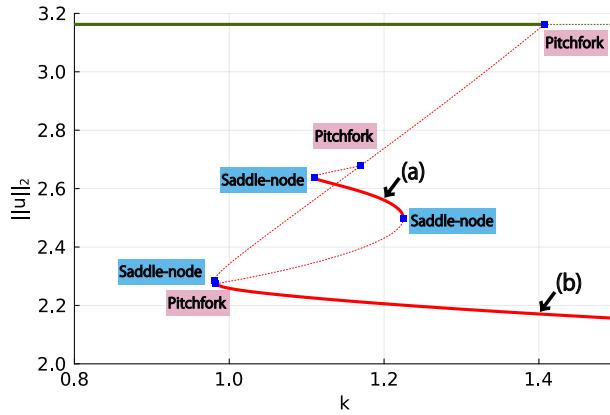


図 3: カーネル (13) で $a_1 = 1.0, a_2 = -4.0, b = 2.5, N = 2$ とした場合の分岐図. 緑は自明解, 赤は非自明定常解で実線が安定, 点線が不安定を表す. 青い四角は分岐点を表す. パラメータは $d = 0.05, c = 1.0, L = 10.0$ とした. 矢印に対応する定常解は図 4に示した.

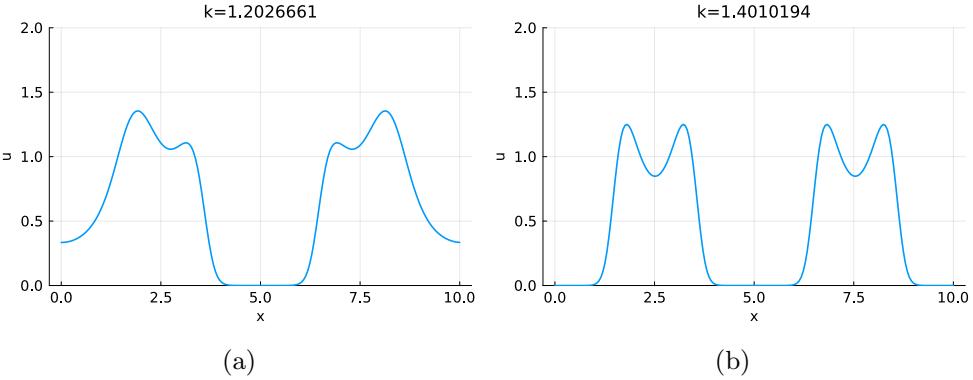


図 4: カーネル (13) で $a_1 = 1.0, a_2 = -4.0, b = 2.5, N = 2$ とした場合の安定定常解. (a) は Saddle-node 分岐に挟まれた安定定常解で, 図 3 の矢印 (a) が指す点に対応する. (b) は分岐図下部の安定定常解で, 図 3 の矢印 (b) が指す点に対応する. パラメータは $d = 0.05, c = 1.0, L = 10.0$ とした.

4 まとめ

方程式 (3) に対して, カーネル $K(x) = kJ(x)$ が持つパラメータ k の変化により Pitchfork 分岐が生じ, 非自明解が現れることを厳密に示した. さらに縮約方程式から亜臨界分岐をもたらすカーネルと初めに不安定化するモードに関する条件を整理し, ある変形によってその条件が満たされることを示した. 多重安定性は数値分岐解析によっていくつかのカーネルに対して存在を確かめることができた. 特に凝集を表すカーネルでは自明解と周期解が多重安定となる例が見られ, 反発の効果を持つカーネルでは 3 つの定常解が多重安定となる例が見られた. また, 凝集を表すいくつかのカーネルで分岐構造を比較したところ, 亜臨界分岐で現れる非自明定常解の構造が似ていた. よって, その構造に関わる共通の指標を持つことが期待される. 命題によって与えた変形は相互作用の範囲を狭めることに対応することを踏まえ, 非局所項を展開した近似:

$$(K * u)(t, x) \doteq m_0 u(t, x) - \frac{m_2}{2} u_{xx}(t, x),$$

$$m_0 := \int_{\mathbb{R}} K(x) dx,$$

$$m_2 := \int_{\mathbb{R}} x^2 K(x) dx$$

を用いてモーメントに注目した考察を進めたいと考えている. また, [7] では空間次元によっても分岐構造が変化しうることが指摘されているため, これまでの議論を 2 次元に拡張可能かどうかを検討することも今後の課題である.

参考文献

- [1] Turing, A.M.: The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B* **237**(641), 37–72 (1952).

- [2] Armstrong, N.J., Painter, K.J., Sherratt, J.A.: A continuum approach to modelling cell–cell adhesion. *J. Theoret. Biol.* **243**(1), 98–113 (2006).
- [3] Carrillo, J.A., Murakawa, H., Sato, M., Togashi, H., Trush, O.: A population dynamics model of cell–cell adhesion incorporating population pressure and density saturation. *J. Theoret. Biol.* **474**, 14–24 (2019).
- [4] Gómez-Castro, D.: Beginner’s guide to aggregation-diffusion equations. *SeMA J.* **81**(4), 531–587 (2024).
- [5] Murakawa, H., Tanaka, Y.: Keller–Segel type approximation for nonlocal Fokker–Planck equations in one-dimensional bounded domain. *Eur. J. Appl. Math.*, 1–37 (2025)
- [6] Krause, A.L., Gaffney, E.A., Jewell, T.J., Klika, V., Walker, B.J.: Turing instabilities are not enough to ensure pattern formation. *Bull. Math. Biol.* **86**(2), 21 (2024).
- [7] Jewell, T.J., Krause, A.L., Maini, P.K., Gaffney, E.A.: Patterning of nonlocal transport models in biology: The impact of spatial dimension. *Math. Biosci.* **366**, 109093 (2023).
- [8] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H.: Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Funct. Anal.* **8**(2), 321–340 (1971)
- [9] Haragus, M., Iooss, G.: Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems. Springer London (2011).
- [10] 長山 雅晴: 数値分岐計算法入門. 応用数学勉強会レクチャーノート (PDF) (2014)